

ЧИСЛА

1

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, используемые для счёта предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются натуральными.

Абс.... - число

$p = m + n$ слагаемые = сумма

$p = m \cdot n$ множители = произведение

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ

1°. $a + b = b + a$ (переместительный закон сложения)

2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения <ассоциативный>)

3°. $ab = ba$ (переместительный закон умножения <коммутативный>)

4°. $(ab)c = a(bc)$ (сочетательный закон умножения <ассоциативный>)

5°. $a(b + c) = ab + ac$ (распределительный закон умножения относительно сложения <дистрибутивный>)

$m - n = k$ уменьшаемое - вычитаемое = разность

$m : n = k$ делимое : делитель = частное

m - кратное числу n

n - делитель числа m

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются числовые выражения

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая правильный порядок, то получится число, которое называется значением выражения.

$$m = np + r$$

m - делимое n - делитель ($m > n$)

p - частное r - остаток

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

(ТЕОРЕМА О ДЕЛИМОСТИ СУММЫ)

Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число

(ТЕОРЕМА О ДЕЛИМОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число

$$\overline{abc} : 2 \iff c : 2$$

$$\overline{abc} : 3 \iff (a+b+c) : 3$$

$$\overline{abc} : 4 \iff \overline{bc} : 4$$

$$\overline{abc} : 5 \iff c = 0 \text{ или } c = 5$$

$$\overline{abc} : 9 \iff (a+b+c) : 9$$

$$\overline{abc} : 10 \iff c = 0$$

Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно наз-вается простым.

Если число имеет более двух делителей, то оно наз. составным.

Любое составное натуральное число мож-но разложить на простые множители, и только одним способом.

360	2	Если в разложении числа на про-
180	2	стые множители один и тот же
90	2	множитель a встречается n раз,
45	3	то записывают коротко:
15	3	a^n , т.е. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ множителей}} = a^n$
5	5	a^n - степень
1		a - основание степени, n - показатель степени

$D(a, b)$ - наибольший общий делитель (НОД)
(читается: „ D от a, b “)

пример: найти $D(48, 60, 72)$

$$48 = 2^4 \cdot 3; 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5; 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad \text{значит,}$$

$$D(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$K(a, b)$ - наименьшее общее кратное (НОК)
(читается: „ K от a, b “)

пример: найти $K(240, 450)$

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$K(240, 450) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$$

Если $D(a, b) = 1$ то числа a и b наз. взаимно простыми

Для любых натуральных a и b справедливо ра-венство.

$$D(a, b) \cdot K(a, b) = a \cdot b$$

Используемые в алгебре буквы называются переменными.
Число, подставляемое вместо буквы, наз. ее значением.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Обыкновенная дробь - это число

вида $\frac{m}{n}$ m и n - натуральные числа

m - числитель дроби

n - знаменатель

Правильная дробь $\frac{m}{n}$ $m < n$

Неправильная дробь $\frac{m}{n}$ $m \geq n$

Вместо $3 + \frac{4}{13}$ пишут $3\frac{4}{13}$. Число

записанное в таком виде, наз. смешанным числом.

Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются

равными, если $ad = bc$

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

если числитель и знаменатель данной дроби

умножить или разделить

на одно и то же н.т. число, то получится дробь, равная данной.

Если числитель и знаменатель взаимно простые числа, то дробь называется

несократимой.

$$\frac{7}{24} = \frac{7^5}{24} = \frac{35}{120} \quad \frac{11}{30} = \frac{11^4}{30} = \frac{44}{120}$$

где 5, 4 - дополнительные множители

А. Действия над обыкновенными дробями 3

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Десятичная дробь - это правильная дробь, знаменатель которой равен 10^n

Значащими цифрами числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале.

Б. Действия над десятичными дробями.

$$\begin{array}{r} 12,700 \\ + 3,442 \\ \hline 16,142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13,10 \\ - 0,37 \\ \hline 12,73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,12 \\ \times 0,13 \\ \hline 636 \\ 212 \\ \hline 0,2756 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22,1 \\ \times 13 \\ \hline 31 \\ 221 \\ \hline 2,917 \end{array}$$

Дробь 0,01 наз. процентом и обозн. 1%

Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

$$\frac{1}{2} = 0,5000...0$$

цифр

Последовательно повторяющаяся группа цифр (микиальная) после запятой в десятичной записи числа называется перiodом, а бесконечная десятичная

Дробь, имеющая такой период в своей записи, наз. периодической.

$$0,2135135135... = 0,2(135)$$

Если период начинается сразу после запятой, то дробь наз. чистой периодической $\langle 2,2323... = 2,(23) \rangle$

Если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь наз. смешанной периодической $\langle 0,2(135) ; 2,73(0) \rangle$

Сворачивание бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную

$$a = 0,(13)$$

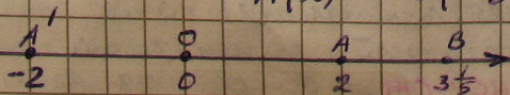
$$100 \cdot a = 13,(13) \quad 100a - a = 99a$$

$$99a = 13 \quad a = \frac{13}{99}$$

Прямая на которой выбрано направление отметка точка O , которую принимают за начало отсчёта, и единичный отрезок $[0;1]$, наз. координатной прямой

Если т.к. принадлежит коор. прямой то под этой точкой подразумевается некоторое число, это число называется координатой точки

$$A(2) \quad B(3\frac{1}{5})$$



числа, точки которых на координатной прямой расположены симметрично относительно начала отсчёта, наз. противоположными числа, которые соответствуют точки, расположенные на координатной прямой в заданном направлении, наз. положительными, а расположенные на координатной прямой в направлении, противоположном заданному, наз. отрицательными.

Целые числа — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0 .

Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество рациональных чисел.

Действительные числа

Любая бесконечная десятичная непериодическая дробь есть иррациональное число

Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество действительных чисел (числовая прямая)

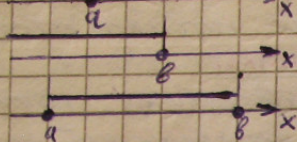
множества

способ задания:

$$1. \text{ физика } \Rightarrow \{ \varphi, u, z, k, A \}$$

2. $Q = \{x | x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

3. $[a; +\infty) = \{x | x \geq a\}$



$(-\infty; b)$
 $[a; b]$

множества: $A, B, C, \dots$

элементы множества: $a, b, c, \dots$

пустое множество - $\emptyset$

$x \in A$

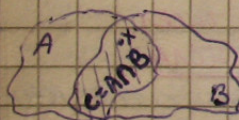
$y \in A$ $y \notin A$

x принадлежит мн. A y не принадлежит мн. A

пусто - $\square$; существует - $\exists$; любой - $\forall$

и - $\wedge$; или - $\vee$

Пересечением двух множеств называется такое множество, элементы которого входят в каждое из данных множеств.

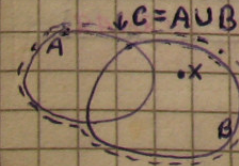


$x \in C$ $C = A \cap B$

$x \in A \wedge x \in B$

$A \cap A = A$; $\emptyset \cap A = \emptyset$

Объединением двух множеств называется такое множество, элементы которого входят хотя бы в одно из данных множеств

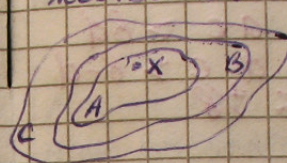


$x \in C$

$x \in A \vee x \in B$

$R \cup A = R$; $\emptyset \cup A = A$

множество A входит в множество B (является его подмножеством), если каждый элемент множества A входит в множество B .



$A \subset B$ (A входит в B)
 $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

пересечение - $\cap$

объединение - $\cup$

включение - $\subset$

?! - требуется доказать

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел $\langle n \in \mathbb{N} \rangle$

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел $\langle m \in \mathbb{Z} \rangle$

$\mathbb{Z}_0$ - множество положительных, целых чисел $\langle m \in \mathbb{Z}_0 \rangle$

$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел $\langle m \in \mathbb{Q} \rangle$

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел $\langle x \in \mathbb{R} \rangle$

a больше b ($a > b$) если $a - b$ - положительное число
 a меньше b ($a < b$) если $a - b$ - отрицательное число

$<, >$ - знаки строгих неравенств

$\leq, \geq$ - знаки нестрогих неравенств

свойства числовых неравенств

1°. Если $a > b$, то $b < a$

2°. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности)

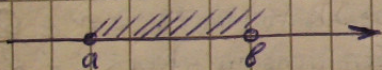
3°. Если $a > b$, то $a + c > b + c$

4°. Если $a > b$ и c - положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$

- 5°. Если $a > b$ и c - отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.
- 6°. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
- 7°. Если a, b, c, d - положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.
- 8°. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.
- 9°. Если $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
- 10°. Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > b^n$.

Числовые промежутки

Множество всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ ($a; b$), называют интервалом.



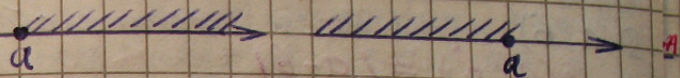
Множество всех чисел x , каждое из которых удовлетворяет неравенству $a \leq x \leq b$ $[a; b]$, называют отрезком.



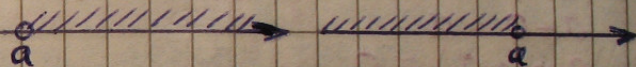
Множество всех чисел x , каждое из которых удовлетворяет неравенству $a \leq x < b$ $[a; b)$ <или $a < x \leq b$ $(a; b]$, называют полупинтервалом.



Множество всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $x \geq a$ $[a; +\infty)$ <или $x \leq a$ $(-\infty; a]$, называют лучом.



Множество всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $x > a$ $(a; +\infty)$ <или $x < a$ $(-\infty; a)$, называют открытым лучом.



Модуль

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Свойства модулей.

- 1°. $|a| \geq 0$
- 2°. $|a| = |-a|$
- 3°. $|ab| = |a| \cdot |b|$
- 4°. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- 5°. $|a|^2 = a^2$

$$\varphi(a; b) = |a - b|$$

Если a и b — две точки координатной прямой, то расстояние между ними $\varphi(a; b)$ выражается формулой

$$\varphi(a; b) = |a - b|$$

Свойства арифметических действий над действительными числами

- 1° $a + b = b + a$ < коммутативный >
- 2° $(a + b) + c = a + (b + c)$ < ассоциативный >
- 3° $a + 0 = a$
- 4° $a + (-a) = 0$
- 5° $ab = ba$ < коммутативный >
- 6° $(ab)c = a(bc)$ < ассоциативный >
- 7° $a(b + c) = ab + ac$ < дистрибутивный >
- 8° $a \cdot 1 = a$
- 9° $a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$

ПРОПОРЦИИ

Если a, b, c, d — действительные числа, отличные от 0, то равенство $a:b = c:d$ называют пропорцией

где a и d — крайние члены пропорции
 b и c — средние члены пропорции

3 теоремы о пропорциях

- I. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

если $a/b = c/d$, то $ad = bc$

Крайние члены пропорции можно поменять местами, т.е. если $a/b = c/d$, то $d/b = c/a$

Средние члены пропорции можно поменять местами, т.е. если $a/b = c/d$, то $a/c = b/d$

Если x действительное число, то его целой частью $[x]$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x .
Дробной частью $\{x\}$ числа x называется разность между числом и его целой частью $\{x\} = x - [x]$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Если a — действительное число, а n — натуральное число, больше единицы, n -й степенью числа a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a , т.е. $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

a — основание степени

n — показатель степени

Свойства степени с натуральным показателем

- 1° $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
- 2° $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$
- 3° $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$
- 4° $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
- 5° $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$

полагают

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

стандартный вид "+" действительного числа
Если "+" число a представлено в виде $a \cdot 10^n$ где $1 \leq a < 10$, n -целое число, то говорят, что число a записано в стандартном виде.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Если $x^n = a$, то число x называется арифметическим корнем n -й степени из числа a $\sqrt[n]{a}$

если $n=2$ то $\sqrt{\quad}$ без показателя называется квадратным корнем

a - подкоренное число

n - показатель корня (радикала)

свойства корней если $a \geq 0$ и $b \geq 0$

$$1^\circ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2^\circ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

$$3^\circ (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$4^\circ \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$$

$$5^\circ \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^k}$$

Если $a \geq 0$ и $m, n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

и если $a > 0$, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Округлить число до определенного разряда это значит, все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на 1. Если же меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют.

$\approx$ - знак приближенного равенства

Если a - приближенное значение числа x , то $|a - x|$, называется абсолютной погрешностью

Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения

$\frac{|a - x|}{|a|}$ называется относительной погрешностью

обычно выражают в процентах

Пример извлечения квадратного корня из натурального числа.

Вотислим $\sqrt{138384}$

$$\sqrt{13'83'84} = 372$$

$$\begin{array}{r} 372 \\ 7 \overline{) 138384} \\ \underline{7 469} \\ 7469 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 372 \\ 2 \overline{) 1484} \\ \underline{2 1484} \\ 0 \end{array}$$

Свойства степеней с действительными показателями

Если $a > 0$, $b > 0$ и $x, y \in \mathbb{R}$

- 1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- 2° $a^x : a^y = a^{x-y}$
- 3° $(a^x)^y = a^{xy}$
- 4° $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- 5° $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Комплексные числа

Комплексным числом наз. всякая упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел a и b .

Два комплексных числа наз. равными тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$ где $(a; b)$ и $(c; d)$ комп. числа. Если комп. числа $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$

наз. комп. число $(a+c; b+d)$
комплексный нуль $(0; 0)$

противоположное числу $z = (a; b)$ числу $(-a; -b)$

разность комп. чисел z и w есть комп. число $(a-c; b-d)$

произведение комп. чисел z и w наз. комп. число $(ac-bd; ad+bc)$

Деление комп. чисел $z = (a; b)$, $w = (c; d) \neq (0; 0)$
 пусть $u = (x; y)$ есть частное от деления z на w

тогда $z = uw$

$$uw = (x; y)(c; d) = (xc-yd; xd+yc) = (a; b)$$

$$\begin{cases} xc-yd = a \\ dx+cy = b \end{cases} \quad x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a; b)}{(c; d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$$

4 равенства

- (1) $(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0)$
- (2) $(a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1)$
- (3) $(a; 0) + (b; 0) = (a+b; 0)$
- (4) $(a; 0) \cdot (b; 0) = (ab; 0)$

условия вместо $(a; 0)$ писать a , а комп. число $(0; 1)$ обозначать i наз. мнимой единицей

$$i^2 = -1, \text{ а 2 равенство } (a; b) = a + bi$$

Запись $a + bi$ наз. алгебраической формой комплексного числа $z = (a; b)$

число a наз. действительной частью комплексного числа z ,

а bi — его мнимой частью

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $i^2 = -1$

$$\begin{aligned}
 (a+bi) + (c+di) &= (a+c) + (b+d)i \\
 (a+bi) - (c+di) &= (a-c) + (b-d)i \\
 (a+bi) * (c+di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\
 \Rightarrow (a+bi) * (c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i \\
 \frac{(a+bi)}{(c+di)} * \frac{(c-di)}{(c-di)} &= \frac{ac+bc i - ad i - bd i^2}{c^2 - d^2 i^2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Числа $c+di$ и $c-di$ называются комплексно-сопряженными.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Из чисел и переменных с помощью арифметических знаков, возведения в рациональную степень и извлечения корня и с помощью скобок составляются алгебраические выражения.

Если алг. выраж. не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то оно наз. целым.

Если используются деление на выражения с переменными, то это выражение наз. дробным.

Целые и дробные выражения наз. рациональными выражениями.

Если в ал. выраж. используется извлечение корня из переменных (или

возведение переменных в дробную степень), то такое ал. выраж. наз. иррациональным.

Значения переменных, при которых алг. выраж. имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

Множество всех допустимых значений переменных называют областью определения алгебр. выражения.

Если в алг. выраж. переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение наз. значением алгебраического выражения при тех

выбранных значениях переменных. За значения алг. выраж. которые содержат одни и те же переменные и при одинаковых переменных наз. соответствующими значениями.

Если соответствующие значения 2-х выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения наз. тождественно равными.

Тождеством наз. равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, наз. тождественным преобразованием выражения

Одночленом наз. такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными.

Привести к стандартному виду, т.е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на k -м месте, и степеней различных переменных.

Коэффициентом одночлена наз. числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Сумму показателей степеней всех переменных наз. степенью одночлена

Одночлен, приведенный к стандартному виду, наз. подобными,

если они отличаются только коэффициентом или совсем не отличаются.

Сложение и вычитание подобных одночленов называют

приведением подобных слагаемых.

Многочленом наз. сумму одночленов. 11

Если все члены многочлена записать в стандартном виде и выполнить приведение подобных слагаемых, то получится многочлен стандартного вида

Формулы сокращённого умножения

$$(1) \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$(2) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(4) \quad a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$(5) \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$(6) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(7) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Разложение многочленов на множители

1) Вынесение общего множителя за скобку

2) Использование формул сокращённого умножения

3) Способ группировки

Многочлен $ax + b$, где a, b - числа ($a \neq 0$), а x - переменная, называется многочленом первой степени.

Многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c - числа ($a \neq 0$), а x - переменная, наз. многочленом второй степени (или квадратным или трёхчленом)

А $ax^3 + bx^2 + cx + d$ а b, c, d - числа ($a \neq 0$) x - многочленом третьей степени.

Если $a, b, c, \dots, l, m$ - числа ($a \neq 0$), а x - переменная, то многочлен

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + lx + m$$

наз. многочленом n -й степени (относительно x)

$ax^n, bx^{n-1}, \dots, lx, m$ - члены многочлена

$a, b, c, \dots, l, m$ - коэффициенты

ax^n - старший член многочлена

a - коэф. при старшем члене

m - свободный член многочлена

Степень многочлена - это степень старшего члена

Корнем многочлена $P(x)$ наз., такое значение x , при котором многочлен обращается в нуль

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Если x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (т.е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$) то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Разложение на множители

Авучлена $x^n - a^n$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-2} + xa^{n-1} + a^n)$$

Возведение двучлена в натуральную степень (Формула Ньютона)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

Дробное выражение записанное в виде $\frac{P}{Q}$, где P и Q - рациональные выражения, причем Q обязательно содержит переменные, наз. рациональной дробью

Сократить дробь - это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель.

Общим знаменателем нескольких рац. дробей наз. целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби.

Дополнительный множитель для данной дроби равен частному от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рац. дробей, а также к возве-

векую дробь в натуральную степень.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt[k]{a^k} = |a| \text{ где } k=2n \text{ и } n \in \mathbb{N}$$

Для преобразования иррациональных выражений используются свойства радикалов и свойства степеней с рациональным показателем.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Зависимость переменной y от переменной x наз. функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y .

x - независимая переменная (аргумент)

y - зависимая переменная

Значение y , соответствующее заданному значению x , наз. значением функции
 $y = f(x)$ <"эф от икс">

Все значения, которые принимает независимая переменная (аргумент), образуют область определения функции.

Все значения, которые принимает функция $f(x)$ (при x , принадлежащих области ее определения), образуют область значений функции.

Функция задана формулой или 13

что функция задана аналитически если $y = f(x)$ где $f(x)$ - некоторое выражение с переменной x .

Табличный способ задания функции способ по таблице

Множество всех пар действительных чисел наз. числовой плоскостью

Координатная плоскость xOy определяется двумя взаимно перпендикулярными координатными прямыми с общим началом O и одинаковым масштабом.

Точка O - начало координат

Горизонтальная прямая - ось абсцисс (или ось x)

Вертикальная прямая - ось ординат (или ось y)

Множество точек $(x; f(x))$ есть график функции

Параболой явл. график любой функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$

Функция $y = f(x)$ наз. четной, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Функция $y = f(x)$ наз. нечетной, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

Если функция явл. четной, то её график симметричен относительно осей Y .
Если функция явл. нечетной, то её график симметричен относительно начала координат.

Функция $y=f(x)$ наз. периодической, если существует такое отличное от нуля число T , что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.
Число T наз. периодом функции $y=f(x)$.

Наименьший (положительный) период функции наз. основным периодом.

Функция $y=f(x)$ наз. возрастающей на промежутке X , если для любых x_1 и x_2 из X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Функция $y=f(x)$ наз. убывающей на промежутке X , если для любых x_1 и x_2 из X , таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Возрастающие и убывающие функции объединяются термином "монотонные функции".

ВИДЫ ФУНКЦИЙ

14

Постоянной наз. функция заданная формулой $y=b$, где b — некоторое число.

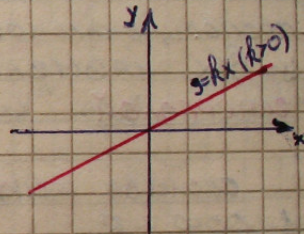
Прямой пропорциональностью наз. функция, заданная формулой $y=kx$, где $k \neq 0$ — коэффициент пропорциональности, свойства функции $y=kx$

1. ООФ — R

2. нечетная

3. при $k > 0 \uparrow$, а при $k < 0 \downarrow$ на всей числовой прямой

Графиком прямой пропорциональности $y=kx$ явл. прямая, проходящая через начало координат



Линейной функцией наз. такая функция, которая задана формулой $y=kx+b$, где $k, b \in R$

свойства линейной функции $y=kx+b$

1. ООФ — R

2. ни четна, ни нечетна

3. при $k > 0 \uparrow$, а при $k < 0 \downarrow$ на всей числовой прямой

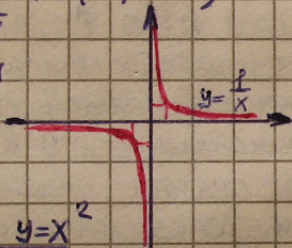
Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая

ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬЮ НАЗ. ФУНКЦИЮ, ЗАДАННУЮ ФОРМУЛОЙ $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ - КОЭФФИЦИЕНТ ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ.

свойства функции $y = \frac{k}{x}$

1. ООФ - $\mathbb{R}$, кроме нуля
2. нечётная
3. если $k > 0$ $\downarrow$ $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
если $k < 0$ $\uparrow$ $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ называют гиперболой



свойства функции $y = x^2$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. чётная
3. $(-\infty; 0] \downarrow$ и $[0; +\infty) \uparrow$

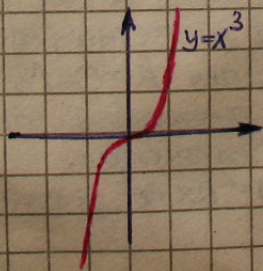
График функции $y = x^2$ - ПАРАБОЛА

свойства функции $y = x^3$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. нечётная
3. $\uparrow$ на всей числовой прямой

График функции $y = x^3$

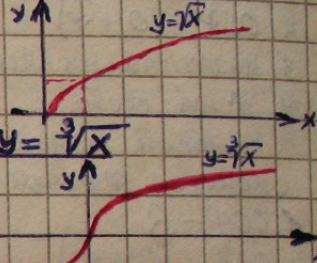
НАЗ. КУБИЧЕСКОЙ ПАРАБОЛОЙ



ФУНКЦИЯ $y = x^n$, где n - НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО, НАЗ. СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

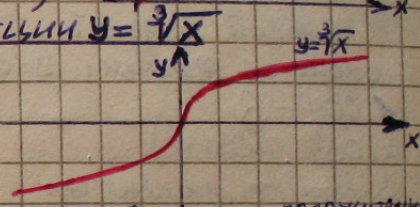
свойства функции $y = \sqrt{x}$

1. ООФ - $[0; +\infty)$
2. ни чётная, ни нечётная
3. $\uparrow$ на лге $[0; +\infty)$



свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. нечётная
3. $\uparrow$ на всей числовой прямой

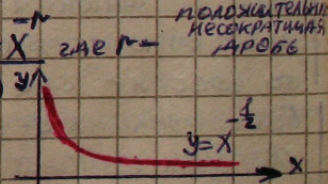


свойства функции $y = x^m$ где m - ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ НЕСОКРАТИМЫЙ ДРОБЬ

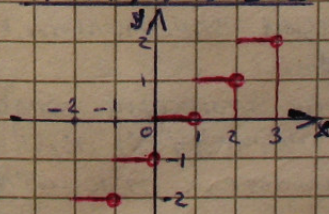
1. ООФ - луг $[0; +\infty)$
2. ни чётная, ни нечётная
3. $\uparrow$ на $[0; +\infty)$

свойства функции $y = x^{-m}$ где m - ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ НЕСОКРАТИМЫЙ ДРОБЬ

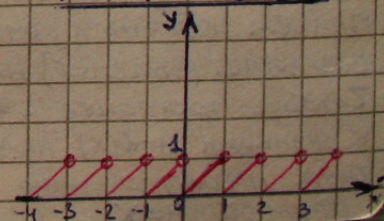
1. ООФ - промежуток $(0; +\infty)$
2. ни чётная, ни нечётная
3. $\downarrow$ на $(0; +\infty)$



ФУНКЦИЯ $y = [x]$



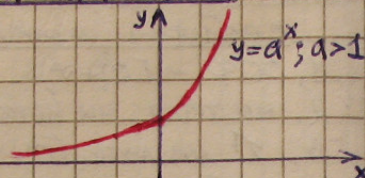
ФУНКЦИЯ $y = \{x\}$



ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ задается формулой $y=a^x$, где $a>0$ и $a \neq 1$

свойства функции $y=a^x$ при $a>1$

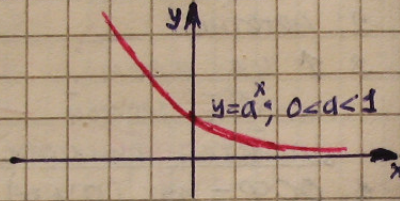
1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. ОЗФ - $(0; +\infty)$
3. нечетная, нечетная
4. $\uparrow$ на всей



числовой прямой

свойства функции $y=a^x$ при $0<a<1$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. ОЗФ - $(0; +\infty)$
3. нечетная, нечетная
4. $\downarrow$ на всей



числовой прямой

Если функция $y=f(x)$ такова, что для любого ее значения y_0 уравнение $f(x)=y_0$ имеет относительно x единственную корень, то говорят, что функция **обратима**

Если функция $y=f(x)$ определена и возрастает (или убывает) на промежутке X и областью ее значений явл. промежуток Y , то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (убывает) на Y

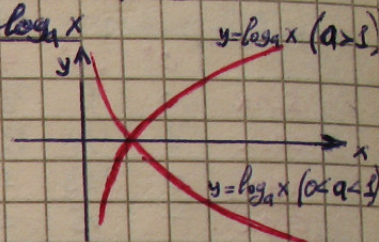
Чтобы построить график функции, обратной к функции $y=f(x)$, надо графику $y=f(x)$ подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y=x$

функция обратная к показательной функции, наз. логарифмической функцией

$y=\log_a x$, где $a>0$ и $a \neq 1$

свойства функции $y=\log_a x$

1. ООФ - $(0; +\infty)$
2. ОЗФ - $(-\infty; +\infty)$
3. нечетная, нечетная
4. $\uparrow (0; +\infty)$ при $a>1$
 $\downarrow (0; +\infty)$ при $0<a<1$



число $e \approx 2,718$

$\log_e x = \ln x$ (натуральный логарифм)

Синусом угла α наз. отношение ординаты точки B к радиусу ($\sin \alpha$).

Косинусом угла α наз. отношение абсциссы точки B к радиусу ($\cos \alpha$).

Тангенсом угла α наз. отношение ординаты точки B к ее абсциссе ($\tan \alpha$).

Котангенсом угла α наз. отношение абсциссы точки B к ее ординате ($\cot \alpha$).

Угол в **1 радиан** - это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) \approx 57^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0,017 \text{ рад}$$

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$
наз. тригонометрическими функциями

функция	аргумент α						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0

+

+

-

+

-

+

-

-

-

+

+

-

для $\sin$ для $\cos$ для tg и ctg

Функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ - НЕЧЁТНЫЕ

Функция $y = \cos x$ - ЧЁТНАЯ

свойства функции $y = \sin x$

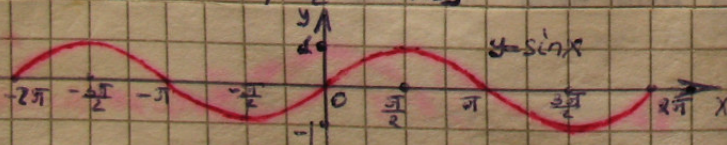
1. ООФ - $\mathbb{R}$

2. ОЗФ - отрезок $[-1; 1]$

3. функция периодическая; основной период равен 2π

4. нечётная

5. $\uparrow [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ $\forall n, n \in \mathbb{Z}$
 $\downarrow [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$



свойства функции $y = \cos x$

[17]

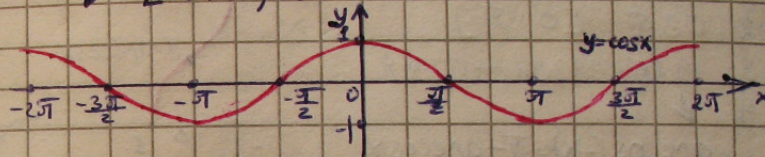
1. ООФ - $\mathbb{R}$

2. ОЗФ - отрезок $[-1; 1]$

3. периодическая с осн. периодом 2π

4. чётная

5. $\uparrow [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ $\forall n, n \in \mathbb{Z}$
 $\downarrow [2\pi n; \pi + 2\pi n]$



свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

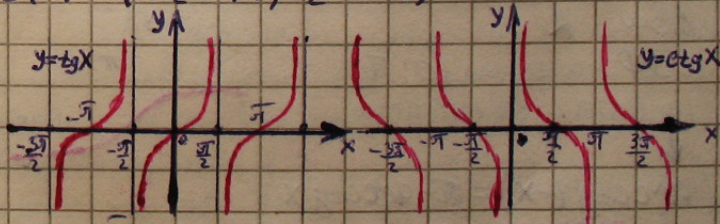
1. ООФ - $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2. ОЗФ - $\mathbb{R}$

3. периодическая с осн. периодом π

4. нечётная

5. $\uparrow (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$



свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. ООФ - $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2. ОЗФ - $\mathbb{R}$

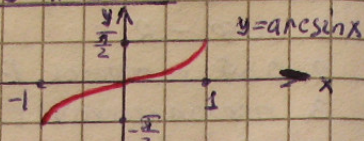
3. периодическая с осн. периодом π

4. нечётная

5. $\downarrow (\pi n; \pi + \pi n)$

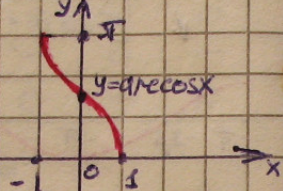
свойства функции $y = \arcsin x$

1. ООФ - $[-1; 1]$
2. ОЗФ - $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
3. нечетная
4. ↑



свойства функции $y = \arccos x$

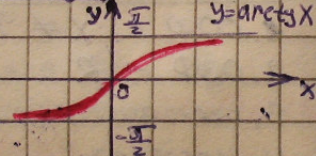
1. ООФ - $[-1; 1]$
2. ОЗФ - $[0; \pi]$
3. ни четная, ни нечетная
4. ↓



$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

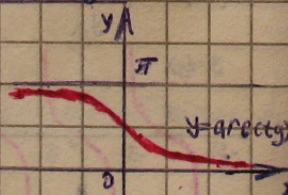
свойства функции $y = \arctg x$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. ОЗФ - интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
3. нечетная
4. ↑



свойства функции $y = \operatorname{arccotg} x$

1. ООФ - $\mathbb{R}$
2. ОЗФ - интервал $(0; \pi)$
3. ни четная, ни нечетная
4. ↓



$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

$$y = f(x)$$

получается симметричным отображением графика $y = f(x)$ относительно оси OY

$$y = -f(x)$$

получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отобра-

жением относительно оси OX .

18

$$y = |f(x)|$$

нужно известна та часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит выше и на оси OX , а лежащую ниже - отобразить симметрично относительно оси OX

$$y = f(|x|)$$

нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую левее оси OY , отбросить, известна часть, лежащую правее и на оси OY и отобразить ее симметрично относительно оси OY

$$y = f(x-a) + b$$

получается построением графика функции $y = f(x)$ в новой системе $X'O'Y'$ где $O'(a, b)$, $O'X' \parallel OX$ и $O'Y' \parallel OY$

$$y = f(mx)$$

при $m > 0$, получается из данного сжатием в m раз ($m > 1$) к оси OY или растяжением в $1/m$ раз ($m < 1$) от оси OY

$$y = k \cdot f(x)$$

при $k > 0$, получается из данного растяжением в k раз ($k > 1$) относительно оси OX или сжатием в $1/k$ раз ($k < 1$) к оси OX

КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЮ, которую можно задать формулой $y = ax^2 + bx + c$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ причём $a \neq 0$

выделение полного квадрата"

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

итак, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

прямая $x = -\frac{b}{2a}$ наз. осью симметрии параболы.

точка $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ — точка пересечения параболы с её осью симметрии — наз. вершиной параболы

способ построения графика квадратичной функции.

1 способ — Отыскание координат вершины параболы по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2 способ — Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$

3 способ — Построение параболы по корням квадратного трёхчлена.

Формула $y = A \cdot \sin(\omega x + \alpha)$ наз. формулой гармонических или синусоидальных колебаний

для построения графика функции | 19

$y = A \cdot \sin(\omega x + \alpha)$ требуется

1. (так как $A \sin(\omega x + \alpha) = A \sin\left(\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)\right)$) осуществим параллельный перенос системы координат, поместив начало новой системы $x'y'$ в точку $O'\left(-\frac{\alpha}{\omega}; 0\right)$

2. В системе $x'y'$ построим график функции $y' = \sin x'$

3. Осуществим сжатие построенного графика к оси y' с коэффициентом ω , получим график $y' = \sin \omega x'$

4. Осуществим растяжение последнего графика от оси x' с коэффициентом A , получим требуемый график.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Трансцендентным наз. выражение, содержащее переменные под знаком трансцендентной функции, т.е. под знаком показательной, логарифмической, тригонометрических или обратных тригонометрических функций.

Логарифмом положительного числа x по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число x .

$$a^{\log_a x} = x$$

1. $\log_a X$ где a - основание логарифма
свойства логарифмов.

$$\log_a a^b = b \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

Если $X_1 > 0$
 $X_2 > 0$, то $\log_a X_1 X_2 = \log_a X_1 + \log_a X_2$

$$\log_a \frac{X_1}{X_2} = \log_a X_1 - \log_a X_2$$

Если $X > 0$, то

$$\log_a X^n = n \cdot \log_a X$$

$$\log_a X = \frac{\log_b X}{\log_b a}$$

$$\log_a X = \log_a X^k$$

2. ВАЖНЫЕ ФОРМУЛЫ СЛЕДСТВИЯ

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

$$\log_a b^x = x \log_a b$$

3. Если некоторое выражение в виде таблица из полож. чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выра-

зите $\log_a b$ через логарифмы входящих в выражение b чисел. Такое преобразование наз. ЛОГАРИФИМИРОВАНИЕМ. Преобразование, при котором выражение находят по его логарифму, наз. ПОТЕНЦИРОВАНИЕМ.

Если основание логарифма равно 10, то логарифм наз. ДЕСЯТИЧНЫМ. ($\lg X = \log_{10} X$)

Целая часть числа $\lg a$, т.е. порядок числа a , наз. ХАРАКТЕРИСТИКОЙ $\lg a$, а дробная часть числа $\lg a$ - его МАНТИСЕЙ. Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, наз. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ.

ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$$

$$\operatorname{tg} X = \frac{\sin X}{\cos X}, \quad X \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} X = \frac{\cos X}{\sin X}, \quad X \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} X \cdot \operatorname{ctg} X = 1, \quad X \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 X = \frac{1}{\cos^2 X}, \quad X \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 X = \frac{1}{\sin^2 X}, \quad X \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sec X = \frac{1}{\cos X} \quad \operatorname{cosec} X = \frac{1}{\sin X}$$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $\sin x$, $\cos x$ И $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

По 4 формулы приведения принимают обобщенно формулы, сводящие значения тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi}{2}n \pm \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, к функции аргумента α

А) перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция.

Б) функция меняется на "кофункцию", если n нечетно

Функция	Аргумент $\pm$							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	
$\sin \pm$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	
$\cos \pm$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	
$\tan \pm$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	
$\cot \pm$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	

Преобразование выражения $a \cdot \cos t + b \cdot \sin t$ к виду $A \cdot \sin(t + \alpha)$

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right)$$

но так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$ то

существует такое α , что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$$

и обозначив $\sqrt{a^2 + b^2}$ через A , получаем

$$a \cos t + b \sin t = A (\sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t) \quad 22$$

$$a \cos t + b \sin t = A \cdot \sin(t + \alpha)$$

где $a = A \sin \alpha$, $b = A \cos \alpha$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Равенство с переменной $f(x) = g(x)$ наз.

уравнением с одной переменной x

Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, наз. корнем уравнения.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными

2 теоремы о преобразованиях уравнения

I Если в уравнении какое-либо слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному

II Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Линейным уравнением с одной переменной x

наз. уравнение вида $ax = b$, где a и b — действительные числа

a — коэффициент при переменной

b — свободный член

при $a \neq 0$ корнем является $\frac{b}{a}$

при $a = 0, b = 0$ — // — R

при $a = 0, b \neq 0$ — // — $\emptyset$

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — действительные числа, причём $a \neq 0$,

наз. квадратным уравнением

a — первый коэффициент

b — второй коэффициент

c — свободный член

Если $a = 1$, то квадратное уравнение

наз. приведённым;

Если $a \neq 1$ — то неприведённым

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят

по формуле: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ наз. дискриминантом квадратного уравнения

Если $D < 0$, не имеет действительных корней

Если $D = 0$, один действительный корень

Если $D > 0$, два действительных корня

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ 23
второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение наз. неполным

ТЕОРЕМА ВЬЕТА

Если приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , т.е.

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

В случае, когда нужно найти значения переменной, удовлетворяющие обоим заданным уравнениям, говоря, что задача система уравнений (для обозначения системы уравнений используется фигурная скобка)

Несколько уравнений с одной переменной образуют совокупность уравнений, если

ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений (для обозначения совокупности уравнений иногда используется квадратная скобка)

$$(1) f_1(x) = g_1(x) \quad (2) f_2(x) = g_2(x)$$

Если каждый корень уравнения (1) является одновременно и корнем уравнения (2), то уравнение (2) называется следствием уравнения (1)

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ наз. множество всех тех значений переменной x , при которых и выражение $f(x)$ и выражение $g(x)$ имеют смысл.

Уравнение $f(x) = g(x)$ наз. рациональным, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения, то уравнение называется целым; если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ является дробным, то рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ наз. дробным

Биквадратным наз. уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$.

Иррациональным наз. уравнение, в котором переменная содержится под

знаком радикала или под знаком 24
возведения в дробную степень.

Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$

Чтобы решить уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, нужно: 1) решить уравнение $f(x) = g(x)$; 2) из найденных корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$; остальные корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются посторонними для уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = a \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad a \in [-1; 1]$$

$$\cos x = a \quad x = \pm \arccos a + \pi n \quad a \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad x = \arctg a + \pi n \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arccotg} a + \pi n \quad a \in \mathbb{R}$$

n — называют параметром

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$$

частные формулы

$$\sin x = -1 \quad ; \quad x = -\pi/2 + 2\pi n$$

$$\sin x = 0 \quad ; \quad x = \pi n$$

$$\sin x = 1 \quad ; \quad x = \pi/2 + 2\pi n$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\cos x &= -1 & ; & \quad x = \pi + 2\pi n \\ \cos x &= 0 & ; & \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \cos x &= 1 & ; & \quad x = 2\pi n \\ \operatorname{tg} x &= 0 & ; & \quad x = \pi n \\ \operatorname{ctg} x &= 0 & ; & \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n\end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Если дано равенство с переменными x, a : $f(x; a) = 0$

Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x , то уравнение $f(x; a) = 0$ наз. уравнением с переменной x и параметром a .

Решить уравнение с параметром a — это значит для каждого значения a найти значения x , удовлетворяющие этому уравнению.

УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$$f(x; y) = 0$$

Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется РЕШЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ.

Уравнения с двумя переменными наз. равносильными, если они имеют одни и те же решения.

Множество точек плоскости, явл. решением уравнения с двумя пере-

менными $f(x; y) = 0$, (на координатной плоскости) наз. ГРАФИКОМ УРАВНЕНИЯ $f(x; y) = 0$ 25

Уравнение вида $ax + by = c$, где x, y — переменные, а a, b, c — числа, называется ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

a, b — коэффициенты при переменных
 c — СВОБОДНЫЙ ЧЛЕН

Если даны 2 уравнения с двумя переменными $f(x; y) = 0$ и $g(x; y) = 0$ и ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо решить СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ.

Каждая пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое уравнение системы называется РЕШЕНИЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

ТЕОРЕМЫ О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной системе уравнений.

СЛЕДСТВИЕ: Если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то полученная система будет равносильна данной.

Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью своих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Методы решения

Метод подстановки

1. Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором y выражено через x (или x через y).
2. Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во 2 уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной.
3. Находят корни этого уравнения.
4. Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения y (или x).

Метод сложения

Основана на теоремах о системах уравнений.

Метод введения новых переменных

26

1. Вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы.
2. Вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Графический метод

По точкам пересечения графиков уравнений.

Метод умножения и деления

Если обе части уравнения $f_2(x; y) = g_2(x; y)$ ни при каких значениях $(x; y)$ одновременно не обращаются в нуль то систему

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y) \\ f_2(x; y) = g_2(x; y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y) \\ f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) = g_1(x; y) \cdot g_2(x; y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y) \\ \frac{f_1(x; y)}{f_2(x; y)} = \frac{g_1(x; y)}{g_2(x; y)} \end{cases} \text{ равносильно.}$$

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad a_1, b_1, c_1 \neq 0$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad a_2, b_2, c_2 \neq 0$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

система двух линейных уравнений с двумя переменными.

имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
 имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
 не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

система трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} f(x; y; z) = 0 \\ g(x; y; z) = 0 \\ h(x; y; z) = 0 \end{cases}$$

решением такой системы наз. всякая тройка чисел, удовлетворяющая каждому уравнению системы.

Для систем трех уравнений с тремя переменными применяются методы решения, аналогичные тем, что используются для систем двух уравнений с двумя переменными.

НЕРАВЕНСТВА

Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство, наз. **решением неравенства**.

Два неравенства с одной переменной наз. **равносильными**, если решения этих неравенств совпадают.

Решить неравенство с переменной — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

5 основных теорем о неравенствах 27

Если из одной части неравенства переместить в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной положительные значения, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной отрицательные значения, изменив при этом знак неравенства

на противоположной, то получится неравенство, равносильное данному.

Для графического решения неравенства $f(x) > g(x)$ нужно построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и выбрать те промежутки оси абсцисс, на которых график функции $y=f(x)$ расположен выше графика функции $y=g(x)$.

Линейным наз. неравенство вида $ax > b$ (или $ax < b, ax \geq b, ax \leq b$)

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство наз. решением системы неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств.

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное

числовое неравенство, называется 28
ся решением совокупности неравенств.
Неравенства вида $ax^2+bx+c > 0$ или $ax^2+bx+c < 0$, где $a \neq 0$ наз. неравенствами второй степени.

ТЕОРЕМА о неравенстве второй степени
Если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена ax^2+bx+c отрицателен, а старший коэффициент a положителен, то при всех значениях x выполняется неравенство $ax^2+bx+c > 0$.

ТЕОРЕМА для неравенств с модулем.

Если выражение $f(x)$ и $g(x)$ при любых x принимают только неотрицательные значения, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^2 > (g(x))^2$ равносильны.
При решении неравенств вида

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует помнить, что показательная функция $y=a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.
Значит, в случае, когда $a > 1$, от неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует переходить к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$; а, в случае, когда $0 < a < 1$, переходим к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.
Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ наз. показательным неравенством.

При решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует помнить, что $y = \log_a x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$. Значит, в случае, когда $a > 1$, от исходного неравенства следует переходить к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, а в случае, когда $0 < a < 1$, переходим к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

ТЕОРЕМА для ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают только неотрицательные значения, то, возведя обе части неравенства в квадрат (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному (на множестве X). Возведя обе части неравенства в одну и ту же нечетную степень (с сохранением знака неравенства) всегда является равносильным преобразованием неравенства.

следует помнить

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \text{ равносильно } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}$$

$\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности 29

$$\text{систем } \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

Неравенства вида $f(x; y) > g(x; y)$ являются неравенством с двумя переменными.

Решением неравенства с двумя переменными наз. пара значений переменных, обращающая неравенство в верное числовое неравенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

МЕТОД ОЦЕНКИ ЗНАКА РАЗНОСТИ

Для того чтобы установить справедливость неравенства $f(x; y; z) > g(x; y; z)$ ($f < g; f \geq g; f \leq g$) составляют разность $f(x; y; z) - g(x; y; z)$ и доказывают, что она положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительна).

НЕРАВЕНСТВО КОШИ

Если $x \geq 0, y \geq 0$, то $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

СИНТЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

С помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (оторных) неравенств. Например:

$$1) \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0$$

$$2) x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0$$

$$3) -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$4) -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

от противного

Предполагают противное (противоположное) и, выполняя преобразования доказывая ложность (истинность) этого неравенства.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО

АНАЛИЗА

Если каждому натуральному числу поставлено в соответствие определённое действительное число: $1 - a_1, 2 - a_2, 3 - a_3, \dots, n - a_n$. Тогда говорят что задана числовая последовательность и пишут: $a_1, a_2, \dots, a_n$ и можно записать (a_n)

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ наз.

членами числовой последовательности

способ задания последовательности

1. Аналитический

Последовательность задается формулой n -го члена.

пример: $a_n = \frac{n}{n+3}$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3}{6}$$

2. РЕКУРРЕНТНЫЙ

30

Любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены.

При этом способе задания последовательности указывают её первый член (или несколько начальных членов) и формулы, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

пример: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

3. Словесный

Задание последовательности описанием.

Последовательность (a_n) наз. возрастающей, если каждый её член меньше следующего за ним, т.е. если $a_n < a_{n+1}$ для любого n .

Последовательность (a_n) наз. убывающей, если каждый её член больше следующего за ним, т.е. если $a_n > a_{n+1}$ для любого n .

Последовательность вида $a_n = b$ наз. постоянной (или стационарной)

Последовательность (a_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с

одним и тем же числом d , наз.
арифметической прогрессией.

Число d — разность прогрессии

Арифм. прогр. задана рекуррентно

$$\text{т.е. } a_{n+1} = a_n + d$$

Обозначение $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Свойства арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО

Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только

тогда, когда каждый ее член, кроме первого $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

(и последнего в случае конечной ариф. прогр.) равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Последовательность (b_n) , первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q наз. геометрической прогрессией.

Число q — знаменатель прогрессии

3

геом. прогр. задана рекуррентно

т.е. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0, q \neq 0$

Обозначение $\div b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

Свойства геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО

Последовательность явл. геометрической прогрессией тогда и только

тогда, когда каждый ее член, кроме первого $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ (и последнего в случае конечной геом. прогр.), равен среднему геометрическому предыдущего и последующего членов.

Число b наз. пределом последовательности (a_n) , если, какое бы положительное число ни взять (это число обычно обозначают ε (эпсилон)), найдется номер N , начиная с которого (при $n \geq N$) отличие a_n от b по модулю будет меньше ε , т.е.

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, или $a_n \rightarrow b$

Говорят, что последовательность (a_n) сходится к b

Геометрический смысл предела последовательности: Если b - предел послед. (a_n) , то, какую бы окрестность точки b ни выбрать, вся последовательность, начиная с некоторого номера N , будет изображаться точками, лежащими в этой окрестности; окрестность точки b - это интервал с центром в точке b .

Важные утверждения о пределах послед.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$

ТЕОРЕМЫ ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НАД ПРЕДЕЛАМИ.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то:

I $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

II $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

III $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$

32

при $|q| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{q - 1} (0 - 1)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$ этот предел наз. суммой бесконечной геометрической прогрессии и обозначают S :

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Число b наз. пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к ∞ , если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдётся число $M > 0$, такое, что для всех x , таких, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ при выборе достаточно больших значений x бесконечно приближается к прямой $y = b$.

Прямая $y = b$ наз. в этом случае горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$

ТЕОРЕМЫ ОБ ОПЕРАЦИЯХ НАД ПРЕДЕЛАМИ

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то

I $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$ теорема о пределе суммы

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то

II $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = ab$ (теорема о пределе произведения)

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, то

III $\lim_{x \rightarrow \infty} k f(x) = k a$ (теорема о вынесении постоянного множителя за знак предела)

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, $b \neq 0$, то

IV $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ (теорема о пределе частного)

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, то функция

наз. непрерывной в точке a .

Если функция непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, то она наз. непрерывной на этом интервале.

Говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, и пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ если бы, какое бы число

$P > 0$ ни взяли, можно указать такую окрестность точки a , что для любого x из этой окрестности ($x \neq a$) соответствующая ордината графика по модулю будет больше P ,

т.е. $|f(x)| > P$

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Если функция $y = f(x)$ определена в точках x и x_0 , то, разность $x - x_0$ наз. приращением аргумента, а разность $f(x) - f(x_0)$ — приращением функции при переходе от значения аргумента x_0 к значению аргумента x .

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки, и, пусть Δx — приращение аргумента, Δf — приращение функции. Тогда производной функции f в точке x_0 наз. число, к которому стремится разностное отношение при Δx , стремящемся к нулю

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функцию, имеющую производную в точке x_0 , наз. дифференцируемой в этой точке

Нахождение производной данной функции f , наз. дифференцированием.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$(c)' = 0 \quad (kx+b)' = k \quad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Если функции u и v дифференцируемы в точке x , то:

1°. Их сумма дифференцируема в точке x и

$$(u+v)' = u' + v' \quad (\text{теорема о дифференцировании суммы})$$

2°. Функция cu , где c - постоянная, дифференцируема в точке x и

$$(cu)' = cu' \quad (\text{теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной})$$

3°. Произведение функций u и v дифференцируемо в точке x и

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (\text{теорема о дифференцировании произведения})$$

4°. Частное функций u и v дифференцируемо в точке x , если $v(x) \neq 0$ и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\text{теорема о дифференцировании частного})$$

Если функция f имеет производную в точке x_0 , а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0 , причём

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Физический смысл производной

$S'(t)$ выражает скорость движения в момент времени t , т.е. $S_m = S'(t)$

Производная функции $y=f(x)$ в точке x выражает скорость изменения функции в точке x , т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y=f(x)$. В этом состоит физический смысл производной.

Производная функции $f'(x)$ называется второй производной функции $y=f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или y''

$S''(t) = a$ есть скорость изменения скорости, т.е. ускорение. В этом состоит физический смысл второй производной

Касательной к графику функции $y=f(x)$, дифференцируемой в точке $x=a$, наз. прямая, проходящая через точку $(a; f(a))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(a)$.
Значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ равно угловому коэфф. касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$. В этом состоит геометрический смысл производной.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет вид:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Формула Лагранжа

Если функция дифференцируема, то на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка $c \in (a; b)$, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Применение производной к исследованию функций на монотонность

Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неотрицательную производную ($f'(x) \geq 0$), причём равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек

этого промежутка. Тогда функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке X . 35

Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неположительную производную ($f'(x) \leq 0$), причём равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка, тогда функция $y=f(x)$

убывает на промежутке X .

На экстремум

Точки максимума (max) и минимума (min) объединяются общим термином —

Точки экстремума

Функция $y=f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке $x=a$, если в этой точке существует окрестность, в которой:

$$f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)) \quad \text{для } x \neq a$$

Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=a$ то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует (необходимое условие экстремума).

Точки, в которых $f'(a) = 0$ и $f'(a)$ не существует и которые принадлежат области определения функции, наз. критическими.

Теорема о критической точке

Пусть $x=a$ - критическая точка функции $y=f(x)$, и пусть существует интервал $(b;c)$, содержащий точку a внутри себя и такой, что на каждом из интервалов $(b;a)$ и $(a;c)$ производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак. Тогда:

- 1) Если на $(b;a)$ $y' > 0$, а на $(a;c)$ $y' < 0$, то $x=a$ точка максимума функции $y=f(x)$
- 2) Если на $(b;a)$ $y' < 0$, а на $(a;c)$ $y' > 0$, то $x=a$ точка минимума функции $y=f(x)$
- 3) Если и на $(b;a)$, и на $(a;c)$ $y' < 0$ или $y' > 0$, то $x=a$ не явл. точкой экстремума функции $y=f(x)$

Функция $y=f(x)$, определённая на промежутке X , достигает на нем своего наибольшего (наименьшего) значения, если существует точка a , принадлежащая этому промежутку, такая, что для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$).
Функция, непрерывная на отрезке достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТОЖДЕСТВ.

36

Для того чтобы непрерывная на промежутке X функция $y=f(x)$ была постоянной на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы ее производная во всех внутренних точках промежутка была равна нулю (условие постоянства функции)

Общая схема построения графика функции.

- 1) Найти область определения функции.
- 2) Найти точки, в которых $f(x) = 0$ (это будут точки пересечения графика с осью абсцисс)
- 3) а) Отметить на оси x точки, найденные в п. 2
б) и точки найденные в п. 1
"Эти точки разбивают ось абсцисс на несколько промежутков, на каждом из которых функция сохраняет постоянный знак"
в) Установить знак функции на каждом из промежутков.
- 4) Исследовать функцию на четность и нечетность
- 5) Найти вертикальные и горизонтальные асимптоты.

- 6) Исследовать функцию на экстремум
 7) Найти несколько дополнительных контрольных точек и построить график.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ наз. ПЕРВООБРАЗНОЙ для функции $f(x)$ на промежутке X , если для любого x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$

основное свойство первообразных.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X , то у функции $f(x)$ бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

Функция	Первообразная
$f(x) = k$	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^n \quad (n \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$

ФУНКЦИЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ 37

$$f(x) = \sin x$$

$$F(x) = -\cos x + C$$

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$F(x) = -\cot x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$F(x) = \tan x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F(x) = \arcsin x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$F(x) = \arctan x + C$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

- 1°. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$ (Первообразная суммы равна сумме первообразных).
- 2°. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$ (Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной).
- 3°. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k, b — постоянные, причём $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$.

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция f , не меняющая на нем знака. Тогда фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ наз. криволинейной трапецией

Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n -частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

получаем $a = x_0$, $b = x_n$ тогда $x_1 - x_0 = \Delta x$ или $x_n - x_{n-1} = \Delta x$ (если части отрезка одинаковы)

Тогда сумма

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

$$\text{где } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

наз. интегральной суммой для функции $y=f(x)$ по отрезку $[a; b]$ 38

Установлено, что для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y=f(x)$ последовательность (интегральная сумма, интегральных сумм $f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$) сходится и ее предел наз. интегралом функции $f(x)$

от a до b и обозначают $\int_a^b f(x) dx$

(«интеграл от a до b от ике до ике»)

$$\text{Итак: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n$$

число a — нижний предел интегрирования

число b — верхний предел интегрирования

$\int$ — знак интеграла

$f(x)$ — подынтегральная функция

Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{или} = F(x) \Big|_a^b \right)$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

1°. Интеграл суммы равен сумме интегралов.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

2°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

$$\int_a^b k f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

39

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И | 42

СООТНОШЕНИЯ АЛГЕБРЫ

I. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ

для любых действительных чисел a, b, c справедливы равенства.

1. $a+b = b+a$ (переместительный закон сложения)

2. $a+(b+c) = (a+b)+c$ (сочетательный закон сложения)

3. $a+0 = a$

4. $a+(-a) = 0$

5. $ab = ba$ (переместительный закон умножения)

6. $a(bc) = (ab)c$ (сочетательный закон умножения)

7. $a(b+c) = ab+ac$ (дистрибутивный закон умножения относительно сложения)

8. $a \cdot 1 = a$

9. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ($a \neq 0$)

II. Деление с остатком

Если m, n, p, r — натуральные числа, причем m — делимое, n — делитель, p — частное и r — остаток ($r < n$), то

$$m = np + r$$

III. свойства неравенства

1. Если $a > b$, то $b < a$

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$

3. Если $a > b$, то $a+c > b+c$

4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$

5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$

6. Если $a > b$ и $c > d$, то $a+c > b+d$

7. Если $a > b$ и $c < d$, то $a-c > b-d$

8. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

9. Если a, b, c, d - положительные числа, причем

$a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$

10. Если $a > b > 0$ n - натуральное число, то

$$a^n > b^n$$

IV. Модуль действительного числа и свойства модулей.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases} \quad (\text{определение модуля})$$

$$|a| \geq 0; \quad |a| = |-a|;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad |a|^2 = a^2;$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

V. Расстояние $\varrho(A; B)$ между двумя точками A и B .

1) координатной прямой при $A(a)$ и $B(b)$

$$\varrho(A; B) = |a - b|$$

2) координатной плоскости при $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$\varrho(A; B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

VI. Разложение на множители

$$1. a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

$$2. a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$3. a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$4. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$5. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$6. a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$7. a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$$8. ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1 \text{ и } x_2 - \text{корни уравнения } ax^2 + bx + c = 0$$

$$9. x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^2x + a^{n-1})$$

VII. Арифметический корень

и его свойства

Если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} = x$ означает:

1) $x \geq 0$; 2) $x^n = a$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}^m; \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

VIII. Степень с рациональным показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \quad a^1 = a \quad (\text{определение степени с нат. показателем})$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a \geq 0 \quad (\text{определение степени с дробным показателем})$$

$$a^0 = 1, \quad \text{где } a \neq 0 \quad (\text{определение степени с нулевым показателем})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{где } a > 0 \quad (\text{определение степени с отриц. рациональным показателем})$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a/b)^n = a^n/b^n$$

IX. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \left(\begin{array}{l} \text{формула} \\ \text{корней ква-} \\ \text{дратного урав-} \\ \text{нения} \end{array} \right)$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения, то

$$x_1 + x_2 = -b \quad x_1 \cdot x_2 = c$$

X. Стандартный вид положительного числа

$$a = a_0 \cdot 10^n, \text{ где } 1 \leq a_0 < 10, n - \text{целое число}$$

XI. Погрешности

Если a — приближенное значение числа α , то

$|x - a|$ — абсолютная погрешность

$$\frac{|x - a|}{|a|} \cdot 100\% - \text{относительная погрешность}$$

XII. Логарифмы

Запись $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$; здесь $a > 0, a \neq 1$ (определение логарифма)

$$\lg b = \log_{10} b \quad (\text{десятичный логарифм})$$

$$\ln x = \log_e x \quad (\text{натуральный логарифм})$$

$$e \approx 2,718282$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad 10^{\lg b} = b, \quad e^{\ln b} = b$$

44

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a x_1/x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \left(\begin{array}{l} \text{формула перехода} \\ \text{к новому основанию} \end{array} \right)$$

$$\log_a b = \log_{a^k} b^k, \quad (k \neq 0)$$

XIII. Арифметическая прогрессия

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (\text{определение арифметической прогр.})$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad (\text{формула } n\text{-го члена})$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (\text{характеристическое свойство})$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad \left(\begin{array}{l} \text{формула суммы} \\ n\text{-первых членов} \end{array} \right)$$

XIV. Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad b_1 \neq 0, q \neq 0 \quad (\text{определение геом. прогрессии})$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (\text{формула } n\text{-го члена})$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \quad (\text{характеристическое свойство})$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{формула} \\ \text{суммы } n\text{-первых членов} \end{array} \right)$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad \left(\begin{array}{l} \text{формула суммы бесконечной} \\ \text{геометрической прогрессии} \\ \text{при } |q| < 1 \end{array} \right)$$

XV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Свойства

$$\sin(-x) = -\sin x; \cos(-x) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x;$$

$$\sin(x+2\pi k) = \sin x, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x+2\pi k) = \cos x, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi k) = \operatorname{tg} x, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi k) = \operatorname{ctg} x, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

2. ТАБЛИЦА значений тригонометрических функций

ФУНКЦИЯ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0

примечание. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ РАД.

3. Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

4. Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

5. Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

6. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

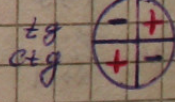
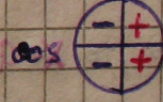
$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

8. ЗНАКИ тригонометрических функций по четвертям:



9. Формулы приведения

ФУНКЦИЯ	АРГУМЕНТ t						
	$\frac{\pi}{2} - t$	$\frac{\pi}{2} + t$	$\pi - t$	$\pi + t$	$\frac{3\pi}{2} - t$	$\frac{3\pi}{2} + t$	$2\pi - t$
$\sin t$	$\cos t$	$\cos t$	$\sin t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$-\cos t$	$-\sin t$
$\cos t$	$\sin t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$-\cos t$	$\sin t$	$\sin t$	$\cos t$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$

10. Решение простейших тригонометрич. уравнений

$$\sin x = a, |a| \leq 1, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a, |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = a, x = \arctan a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = a, x = \operatorname{arccot} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

11. Обратные тригонометрические функции

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{arccot} x < \pi,$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

XVI. Асимптоты графика функции $y = f(x)$

Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, то $y = b$ — горизонт. асимптота

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $x = a$ — вертик. асимптота

XVII. Производная

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{определение} \\ \text{производной} \end{array} \right)$$

1. Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v', (cu)' = c \cdot u'$$

$$(uv)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad |46$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

2. Формулы дифференцирования

$$c' = 0$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = (-\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

3. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

где $x = a$ — абсцисса точки касания

XVIII. Первообразная и интеграл

Если $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ (определение первообразной)

1. Правила вычисления первообразных

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$
 $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то
 $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$
 $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$
 $\frac{1}{k} F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$

2. ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

ФУНКЦИЯ	ПЕРВООБРАЗНАЯ
$f(x) = k$	$F(x) = kx$
$f(x) = x^n \quad (n \neq -1)$	$F(x) = x^{n+1} / (n+1)$
$f(x) = 1/x$	$F(x) = \ln x $
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = a^x / \ln a$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$	$F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$
$f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 x$	$F(x) = \frac{1}{2} \cos 2x$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	$F(x) = \arctg x$

3. Вычисление интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{формула Ньютона-Лейбница})$$

4. Вычисление площади криволинейной трапеции,
ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, где $a < b$, и
графиками функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$,
где $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a; b]$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

СОДЕРЖАНИЕ

Лист

Числа. Натуральные числа,	1
рациональные числа,	25
действительные числа,	4
комплексные числа,	85
Алгебраические выражения	95
Функции и графики. Свойства функций.	125
Виды функций.	14
Трансцендентные выражения	19
Уравнения и системы уравнений	22
Уравнения с одной переменной	22
Уравнения с двумя переменными	24,5
Неравенства	26,5
Элементы математического анализа	29,5
Производная и ее применение	33
Первообразная и интеграл	36,5
Дополнительные сведения	39
Основные формулы и	42
связи. Алгебра	

СОДЕРЖАНИЕ

Лист